實驗一　數據處理與分析

蔡沛真 製

紀錄數據的方式

- 數據
- 精確度
- 單位

有效數字

- 表示實驗所測得之物理量的精確度。
- 包括**精確值**及**估計值**。
- 單位換算不影響有效位數：12.68cm 1.268×10-4 km、0.0001268 km、0.1268 m、12.68 cm、126.8 mm 等其有效位數均為四位。

有效數字的四則運算

- 加法

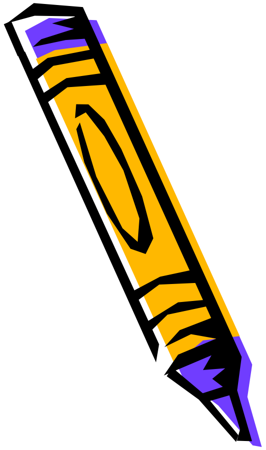
$$\begin{array}{r} 12.48\underline{6} \\ +\quad 406.2\underline{3} \\ \hline 418.7\underline{16} \end{array}$$

→有效數字爲**418.72**

- 減法

$$\begin{array}{r} 2206.47\underline{6} \\ -\quad 406.2\underline{3} \\ \hline 1800.2\underline{46} \end{array}$$

→有效數字爲**1800.25**



- 乘法

$$
\begin{array}{r}
1.4\underline{6} \\
\times \quad 6.2\underline{3} \\
\hline
\underline{438} \\
29\underline{2} \\
87\underline{6} \\
\hline
9.0\underline{958}
\end{array}
$$

→有效數字為9.10

$482687\underline{7} \times 0.6\underline{8} = 3\underline{28227.16} \Rightarrow 3\underline{30000} \Rightarrow 3.3 \times 105$

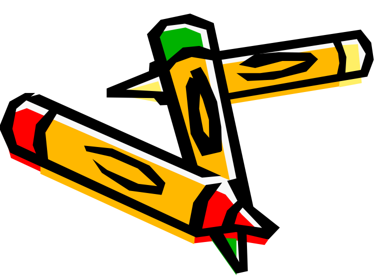
- 除法

$$
\begin{array}{r}
\underline{18.46} \\
5\underline{3}\ \overline{)\,978.4\underline{9}} \\
5\underline{3} \\
\hline
4\underline{48} \\
4\underline{24} \\
\hline
\underline{244} \\
\underline{212} \\
\hline
\underline{329} \\
\underline{318} \\
\hline
\underline{11}
\end{array}
$$

→ 有效數字為18

※當除數為一肯定數值時，

商的有效位數與被除數同。

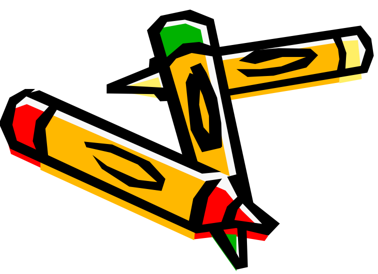


四捨六入

- 以四捨六入法捨去多餘位數。
- 若恰等於**5**，則以“遇雙便捨，逢單則入”法，使最終尾數為偶數。

  6.15➔6.2

  6.65➔6.6



實驗誤差

- 系統誤差
  - 設備系統誤差
  - 環境系統誤差
  - 人爲誤差
- 統計誤差

統計分析

- 算數平均值(Mean) $\bar{x} \equiv \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
- 偏差(Deviation) $d_1 = x_1 - \bar{x}, d_2 = x_2 - \bar{x}, d_n = x_n - \bar{x}$
- 平均偏差(Average Deviation)

$$D \equiv \frac{|d_1| + |d_2| + |d_3| + \ldots + |d_n|}{n} = \frac{1}{n}\sum_i |d_i|$$

- 標準偏差(Standard Deviation)

$$\sigma \equiv \sqrt{\frac{d_1^{\ 2} + d_2^{\ 2} + d_3^{\ 2} + \ldots + d_n^{\ 2}}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i^{\ 2}} \quad (n\text{極大，無法確定時})$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} d_i^{\ 2}} \quad (n\text{有限，且能確定時})$$

- 平均標準差(Standard Deviation of The Mean)

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i} d_i^{\ 2}}$$

- 實驗結果表示爲 $x = \overline{x} \pm \overline{\sigma}$

- 百分誤差 $e = \dfrac{\overline{\sigma}}{\overline{x}} \times 100\%$

誤差傳遞

- 加減的誤差傳遞

$$\overline{x \pm y} = \bar{x} \pm \bar{y}$$

$$\sigma_{\overline{x \pm y}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^{2} + \sigma_{\bar{y}}^{2}}$$

$$\Rightarrow \quad (\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}) + (\bar{y} \pm \sigma_{\bar{y}}) = (\bar{x} + \bar{y}) \pm \sigma_{\overline{x+y}}$$

$$(\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}) - (\bar{y} \pm \sigma_{\bar{y}}) = (\bar{x} - \bar{y}) \pm \sigma_{\overline{x-y}}$$

$$\sigma_{i}^{2} = \sigma_{1}^{2} + \sigma_{2}^{2} + \sigma_{3}^{2} + \cdots + \sigma_{n}^{2} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{i}^{2}$$

- 乘除的誤差傳遞

$$\overline{xy} = \bar{x}\,\bar{y} \qquad\qquad \overline{x/y} = \bar{x}\Big/\bar{y}$$

$$\sigma_{\overline{xy}} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2} \times \overline{xy} \qquad\qquad \sigma_{\overline{x/y}} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2} \times \overline{x/y}$$

$$(\bar{x} + \sigma_{\bar{x}}) \times (\bar{y} + \sigma_{\bar{y}}) = \overline{xy} \pm \sigma_{\overline{xy}}$$

$$(\bar{x} + \sigma_{\bar{x}}) / (\bar{y} + \sigma_{\bar{y}}) = \overline{x/y} \pm \sigma_{\overline{x/y}}$$

$$\left(\frac{\sigma}{y}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_1}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{y_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3}{y_3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\sigma_n}{y_n}\right)^2$$

- 有幂次乘除

$$\overline{x^{l}y^{m}} = \overline{x^{l}}\,\overline{y^{m}} = \bar{x}^{l}\,\bar{y}^{m}$$

$$\left(\frac{\sigma_{\overline{x^{l}y^{m}}}}{\overline{x^{l}y^{m}}}\right)^{2} = l^{2}\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^{2} + m^{2}\left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^{2}$$

迴歸分析

- 線性迴歸分析(Linear Regression)
  → $y=mx+b$
- 多項式迴歸分析(Polynomial Regression)
  → $y=b+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots$
- 指數迴歸分析(Exponential Regression)
  → $y=ce^{bx}$
- 對數迴歸分析(Logarithmic Regression)
  → $y=c\ln+b$
- 乘冪迴歸分析(Power Regression)
  → $y=cx^b$

判定係數 R^2

- 判斷迴歸取線分析所得的方程式是否足以解釋x和y值之間的關係。
- $R^2=0$ →→→ $R^2=1$

完全不相關 →→→ 完全相關